

УДК 519.63: 621.372.8
doi:10.21685/2072-3040-2021-4-4

Численное исследование спектра комплексных волн плоского волновода

М. О. Снегур

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
snegur.max15@gmail.com

Аннотация. *Актуальность и цели.* Цель работы – исследование процесса распространения ТЕ-электромагнитных волн в плоском волноводе. *Материалы и методы.* Для получения численного решения задачи применяется метод вспомогательной задачи Коши. *Результаты.* Разработан метод анализа спектра волн в неоднородной волновой структуре. Доказана теорема о дискретности спектра. *Вывод.* Указанный метод является эффективным способом анализа ТЕ-поляризованных электромагнитных волн.

Ключевые слова: задача распространения электромагнитных волн, ТЕ-волны, уравнение Максвелла, дифференциальные уравнения, диэлектрический слой, диэлектрический слой с поглощением

Финансирование: исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90079.

Для цитирования: Снегур М. О. Численное исследование спектра комплексных волн плоского волновода // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 4. С. 46–56. doi:10.21685/2072-3040-2021-4-4

Numerical study of the spectrum of complex waves of a plane waveguide

M.O. Snegur

Penza State University, Penza, Russia
snegur.max15@gmail.com

Abstract. *Background.* The purpose of this work is to study the process of propagation of TE-electromagnetic waves in a plane waveguide. *Material and methods.* To obtain a numerical solution to the problem, we used the method of the auxiliary Cauchy problem. *Results.* A method for analyzing the spectrum of waves in an inhomogeneous wave structure has been developed. *Conclusions.* This method is an effective way to analyze the propagation of TE-polarized electromagnetic waves.

Keywords: propagation problem of electromagnetic waves, TE-waves, Maxwell's equation, differential equations, dielectric layer, dielectric layer with absorption

Acknowledgments: the research was financed by the RFBR research project No. 20-31-90079.

For citation: Snegur M.O. Numerical study of the spectrum of complex waves of a plane waveguide. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* = *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2021;(4):46–56. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2021-4-4

© Снегур М. О., 2021. Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License / This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Введение

Слой диэлектрика (плоскопараллельный волновод) представляет собой простейшую волноводную структуру, широко применяемую на практике (планарные оптические волноводы). В случае однородного заполнения (однородный диэлектрик) уравнение, характеризующее спектр задачи, может быть получено в явном виде. Этой проблеме посвящено большое количество результатов [1–4], в частности, показано существование конечного числа поверхностных распространяющихся волн [4].

Основное внимание в данной работе уделено классификации ТЕ-волн в неоднородном диэлектрическом слое. Такая задача может быть сведена с помощью вариационной постановки к анализу операторного пучка в пространстве Соболева (такой подход был предложен в [5, 6]. Однако его применение к открытым структурам чревато некоторыми трудностями. Недавно в [5, 6] было показано, что в открытом диэлектрическом слое нет бесконечного числа поверхностных волн, поэтому мы должны комбинировать поверхностные волны и распространяющиеся, чтобы получить бесконечное число нормальных волн и доказать полноту системы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$ с декартовой системой координат $Oxyz$, заполненное изотропной средой без источников, имеющей диэлектрическую проницаемость $\epsilon_c \epsilon_0 \equiv \text{const}$ и магнитную проницаемость $\mu_0 \equiv \text{const}$, где ϵ_0 и μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума. Мы рассматриваем электромагнитные волны, распространяющиеся через слой

$$\Sigma := \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq h\}.$$

Предполагаем, что поля гармонически зависят от времени как $\exp(-i\omega t)$, где $\omega > 0$ – круговая частота. Мы будем рассматривать электромагнитные поля вида

$$\mathbf{E} = (E_x(x)e^{iyz}, E_y(x)e^{iyz}, E_z(x)e^{iyz}), \quad \mathbf{H} = (H_x(x)e^{iyz}, H_y(x)e^{iyz}, H_z(x)e^{iyz});$$

где γ – неизвестный комплексный (спектральный) параметр.

Различают два типа поляризованных волн: ТЕ- и ТМ-поляризованные волны: ТМ – это поляризация магнитного вектора $\mathbf{H}(H_z = 0)$ электромагнитного поля, а ТЕ – поляризация электрического вектора $\mathbf{E}(E_z = 0)$ электромагнитного поля. Заметим, что указанные задачи являются независимыми, но можно дать общую формулировку таких задач.

Определение электромагнитных волн сводится к нахождению нетривиальных решений системы уравнений Максвелла, зависящих от координаты z , вдоль которой структура регулярна, в виде $e^{i\gamma z}$:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = -i\epsilon_0 \tilde{\epsilon} \mathbf{E}, \\ \nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{H}, \end{cases} \quad (1)$$

с условием непрерывности тангенциальной составляющей электрического и магнитного поля на поверхностях разрыва диэлектрической проницаемости ($x = 0$ и $x = h$):

$$\left[E_y \right]_{x=0} = 0, \quad \left[H_z \right]_{x=0} = 0, \quad (2)$$

и

$$\left[E_y \right]_{x=h} = 0, \quad \left[H_z \right]_{x=h} = 0, \quad (3)$$

где $\left[f \right]_{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$.

Мы не будем фиксировать условие излучения на бесконечности, потому что хотим рассмотреть проблему для произвольных γ .

Считаем, что относительная диэлектрическая проницаемость во всем пространстве имеет вид

$$\tilde{\epsilon} = \begin{cases} \epsilon, & 0 \leq x \leq h, \\ \epsilon_c, & x > h. \end{cases} \quad (4)$$

Мы также предполагаем, что $\epsilon(x) > \epsilon_c$ является непрерывной функцией на отрезке $[0, h]$, т.е. $\epsilon(x) \in C[0, h]$ и $\text{Im} \epsilon(x) = 0$.

Задача о поляризованных волнах представляет собой задачу на собственные значения для уравнений Максвелла со спектральным параметром γ , который является постоянной распространения волноведущей структуры.

Поле нормальных ТЕ- и ТМ-поляризованных волн в волноводе можно представить с помощью скалярной функции

$$u := E_y(x). \quad (5)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению тангенциальной составляющей электрического поля u .

Мы имеем следующую задачу на собственные значения для касательной компоненты электрического поля u : найти $\gamma \in \mathbb{C}$ такие, что существуют нетривиальные решения дифференциального уравнения

$$u'' + (\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \tilde{\epsilon} - \gamma^2) u = 0, \quad (6)$$

удовлетворяющие условиям сопряжения

$$\left[u \right]_{x=0} = 0, \quad \left[u' \right]_{x=0} = 0, \quad (7)$$

и

$$\left[u \right]_{x=h} = 0, \quad \left[u' \right]_{x=h} = 0. \quad (8)$$

При $x > h$ мы имеем $\epsilon = \epsilon_c$; из (6) получаем уравнение

$$u'' + \lambda u = 0. \quad (9)$$

Выберем решение этого уравнения в виде

$$u(x; \lambda) = \tilde{A} e^{(h-x)\lambda}, \quad x < 0, \quad (10)$$

где $\lambda^2 = \gamma^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_c$ и λ – новый (комплексный) спектральный параметр; A – константа. Если $\operatorname{Re} \lambda > 0$, мы имеем поверхностную волну. Если $\operatorname{Re} \lambda < 0$, мы имеем вытекающую волну.

При $x < 0$ мы имеем $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_c$; из (6) получаем уравнение

$$u'' - \lambda^2 u = 0. \quad (11)$$

Выберем решение этого уравнения в виде

$$u(x; \lambda) = A e^{x\lambda}, \quad x < 0, \quad (12)$$

где A – константа.

При $0 < x < h$ мы имеем $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon(x)$; тогда из (6) получаем уравнение

$$u'' + (e - \lambda^2)u = 0, \quad (13)$$

где

$$e(x; \omega) = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 (\varepsilon(x) - \varepsilon_c). \quad (14)$$

Определение 1. $\lambda \in \mathbb{C}$ называется характеристическим числом задачи, если существует нетривиальное решение u уравнения (13) при $0 < x < h$, удовлетворяющее (10) при $x > h$ и (12) при $x < 0$, условиям сопряжения (7) и (8).

2. Численный метод

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$u'' + (e - \lambda^2)u = 0 \quad (15)$$

с начальными условиями

$$u(0) := A, u'(0) := A\lambda. \quad (16)$$

Предполагаем, что решение задачи Коши (15), (16) существует и единственно. Оно определено на всем отрезке $[0, h]$ при заданных значениях h и непрерывно зависит от параметра λ . Используя условия сопряжения на второй границе h (8), получаем дисперсионное уравнение

$$\Delta(\lambda) \equiv \lambda u(h) + u'(h) = 0. \quad (17)$$

Из формулы (17) ясно, что значение $\Delta(\lambda)$ выражается через значения решения задачи Коши.

Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда взяв вещественную и мнимую части от выражения (17), получим систему действительных уравнений для определения вещественной и мнимой частей комплексной частоты λ :

$$\Delta_1(\alpha, \beta) := \operatorname{Re} \Delta(\lambda) = 0,$$

$$\Delta_2(\alpha, \beta) := \operatorname{Im} \Delta(\lambda) = 0. \quad (18)$$

Чтобы найти пару (α, β) , мы будем численно решать систему уравнений (18). Решение каждого уравнения в (18) будем изображать в виде кривой в плоскости $O\alpha\beta$. Переносим обе кривые в одну плоскость, мы получаем точки пересечения кривых; эти точки являются решением исходной задачи.

Разбивая отрезки по α и β на более мелкие отрезки, мы задаем сетку, состоящую из узлов $\alpha^{(i)}, \beta^{(j)}$, необходимых нам для использования метода пристрелки. Решая задачу Коши (15), (16) для каждого из узлов сетки, мы находим величины $u(i, j)(h)$ и $u'(i, j)(h)$ для каждого узла. В силу непрерывной зависимости решения $u(h, \alpha, \beta)$ от параметров α и β получаем, что существует точка $(\alpha^{(i)}, \hat{\beta}^{(j)})$ в плоскости $O\alpha\beta$, где $\hat{\beta}^{(j)}$ лежит внутри интервала $(\beta^{(j)}, \beta^{(j+1)})$, такая, что $\Delta_1(\alpha, \beta) = 0$. Чем мельче сетка, которую мы задаем, тем более точное решение мы находим. Повторив эту процедуру для всей сетки, мы получим набор пар $(\beta^{(p)}, \beta^{(q)})$, образующих кривую (синяя кривая на рис. 1), приближенное решение уравнения $\Delta_1(\alpha, \beta) = 0$ в плоскости $O\alpha\beta$.

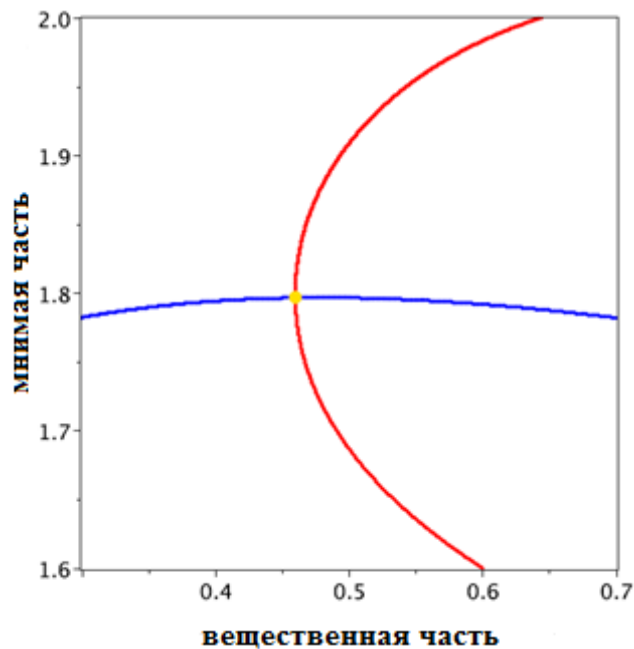


Рис. 1. Численное решение системы (18): синяя кривая – решение первого уравнения системы (18); красная кривая – решение второго уравнения системы (18); точка пересечения синей и красной кривых, обозначена желтым цветом, является решением системы (18)

Применяя ту же процедуру к уравнению $\Delta_2(\alpha, \beta) = 0$, мы получаем еще одну кривую (красная кривая на рис. 1) в плоскости $O\alpha\beta$, которая является приближенным решением указанного уравнения. Очевидно, точка пересечения (желтая точка на рис. 1) расчетных кривых является приближенным решением задачи. Если сделать сетку более плотной, то решения можно получить настолько точными, насколько это необходимо.

3. Численные результаты

На рис. 2–7 показаны рассчитанные постоянные распространения ТЕ-поляризованных волн в слое, заполненном однородным и неоднородным диэлектриком, диэлектриком с потерями и метаматериалом.

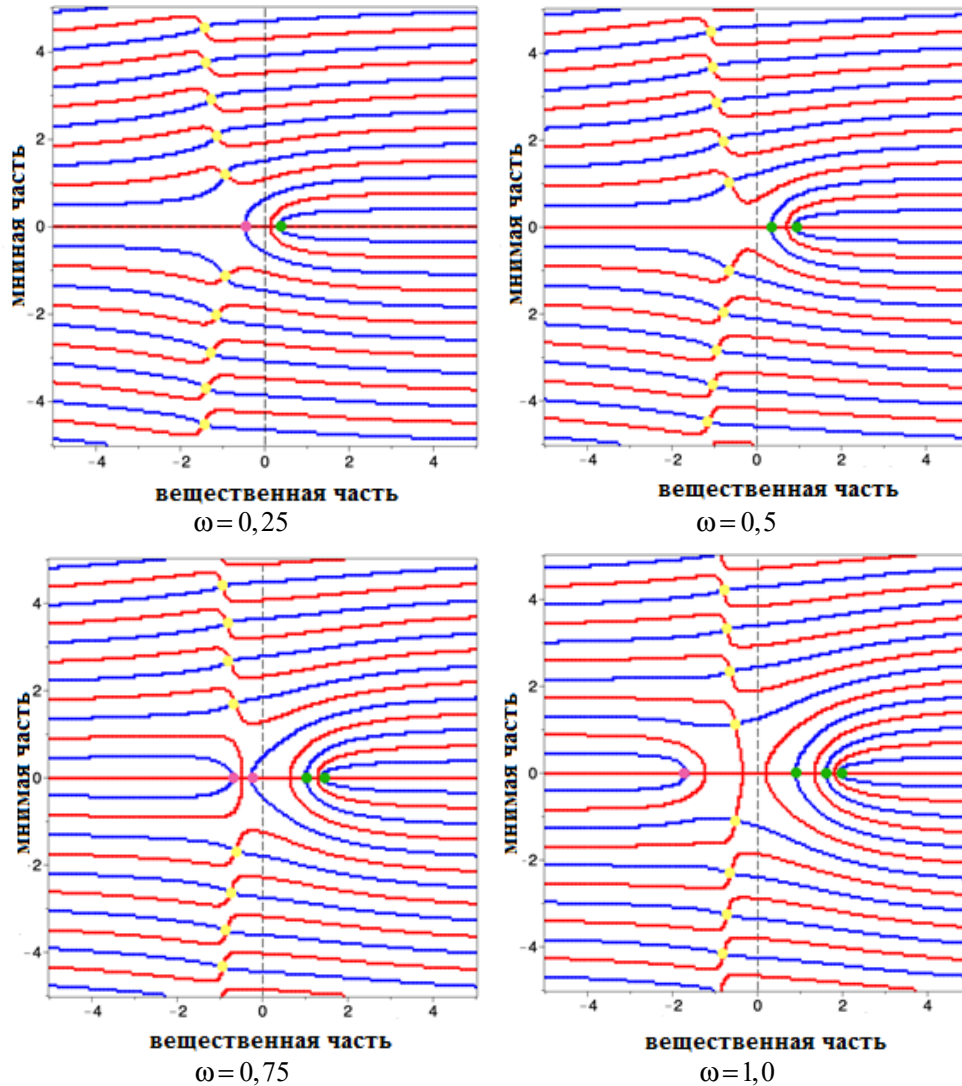


Рис. 2. Численное решение системы (18) для однородного диэлектрика $\epsilon = 4$

На рис. 2 синие и красные кривые – численные решения соответственно первого и второго уравнений системы (18); зеленые и фиолетовые – точки

пересечения – постоянные распространения распространяющейся поверхностной и вытекающей ТЕ-волны; желтые точки пересечения – константы распространения сложных вытекающих ТЕ-волн.

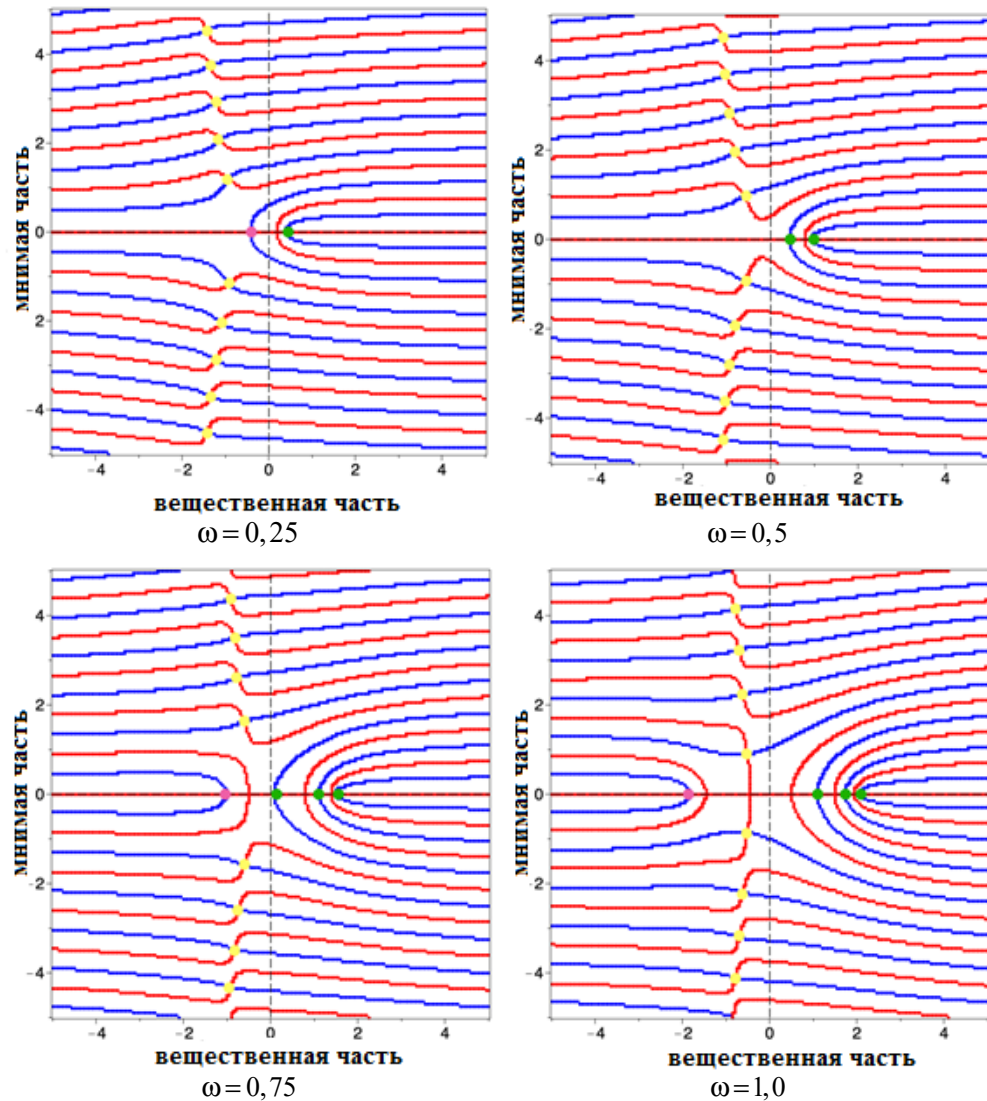


Рис. 3. Численное решение системы (18)
для неоднородного диэлектрика $\varepsilon = 4 + x / h$

На рис. 3 синие и красные кривые – численные решения соответственно первого и второго уравнений системы (18); зеленые и фиолетовые точки пересечения – это постоянные распространения распространяющейся поверхностной и вытекающей ТЕ-волны; желтые точки пересечения – константы распространения сложных вытекающих ТЕ-волн.

На рис. 4 синие и красные кривые – численные решения соответственно первого и второго уравнений системы (18); зеленые и фиолетовые точки пересечения – это постоянные распространения распространяющейся по-

верхностной и вытекающей ТЕ-волны; желтые точки пересечения – константы распространения сложных вытекающих ТЕ-волн.

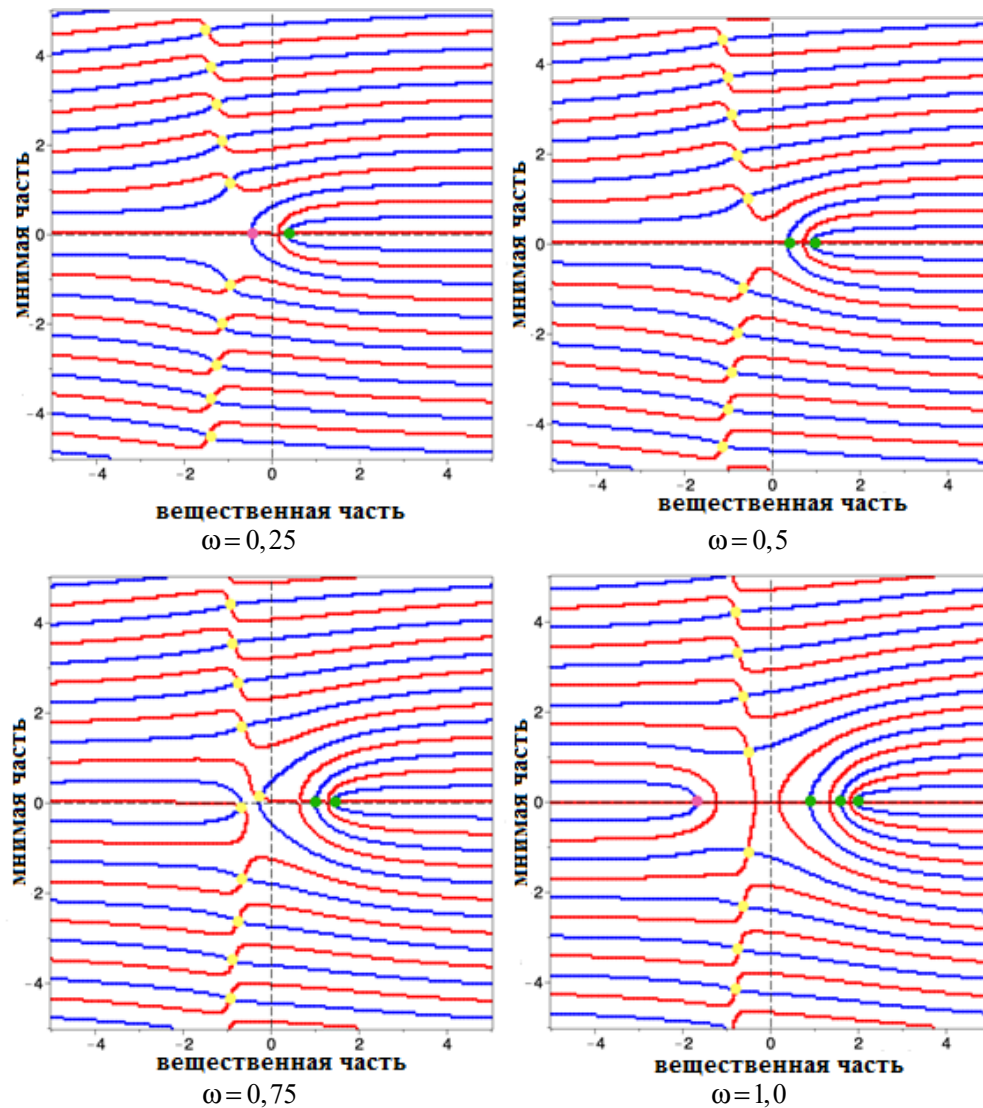


Рис. 4. Численное решение системы (18)
для однородного диэлектрика с потерями $\epsilon = 4 + 0,1\omega i$

На рис. 5 синие и красные кривые – численные решения соответственно первого и второго уравнений системы (18); желтые точки пересечения – константы распространения сложных вытекающих ТЕ-волн.

На рис. 6 синие и красные кривые – численные решения соответственно первого и второго уравнений системы (18); желтые точки пересечения – константы распространения сложных вытекающих ТЕ-волн.

Мы провели численные эксперименты для четырех значений частот. Определяются распространяющиеся, затухающие и сложные поверхностные и вытекающие ТЕ-волны.

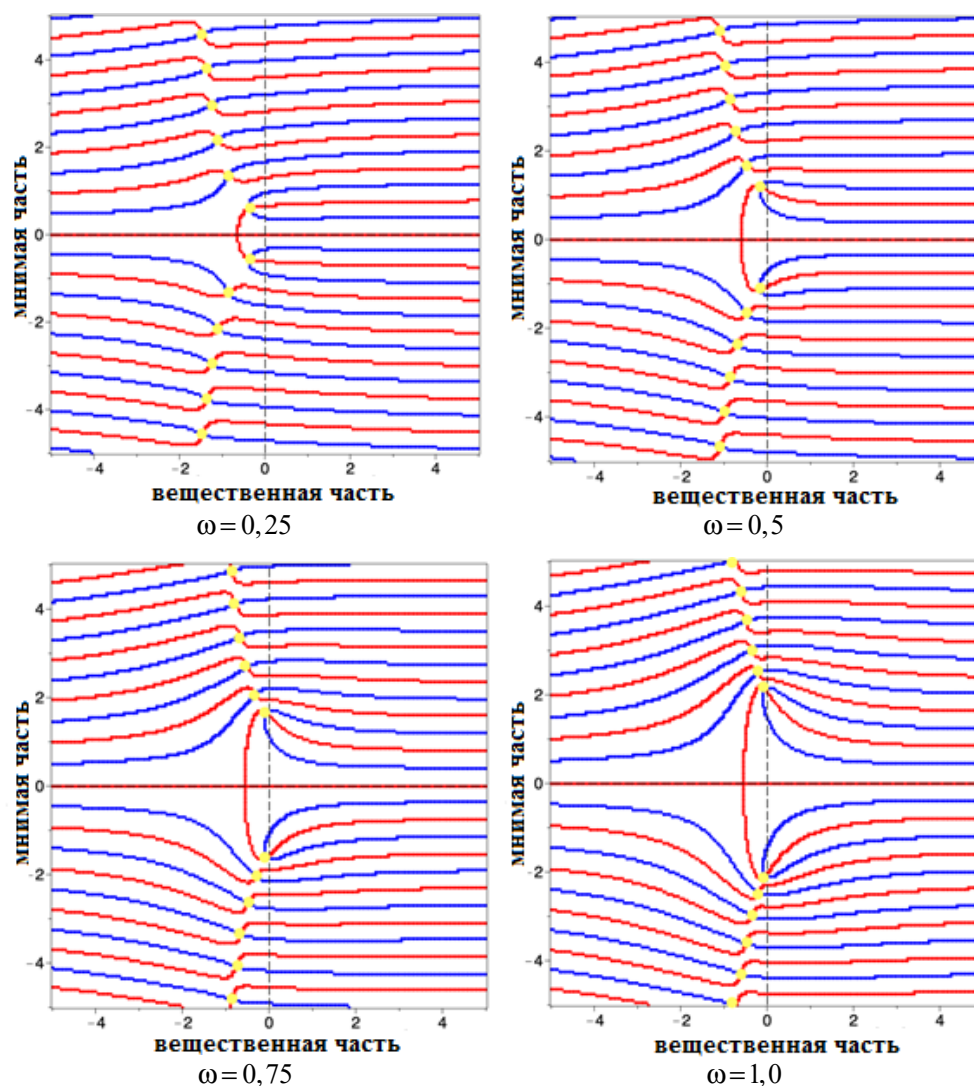


Рис. 5. Численное решение системы (18) для однородного метаматериала $\varepsilon = -4$

В расчетах используются следующие значения параметров: $\varepsilon_c = 1$, $\varepsilon_0 = 1$, $\mu_0 = 1$, $A = 1$, $h = 4$, $a_1 = -5$, $a_2 = 5$, $\tau_1 = 0,05$, $b_1 = -5$, $b_2 = -5$ и $\tau_2 = 0,05$.

Рисунки 2–6 показывают, что нет сложных поверхностных ТЕ-волн (нет точек пересечения синей и красной кривых в области $\text{Re}\gamma > 0$, $\text{Im}\gamma \neq 0$).

На рис. 2–4 представлены результаты расчетов для диэлектрика и диэлектрика с потерями.

В случае метаматериала (5) и (6) с увеличением частоты абсолютные значения постоянных распространения, соответствующие сложным вытекающим ТЕ-волнам, увеличиваются.

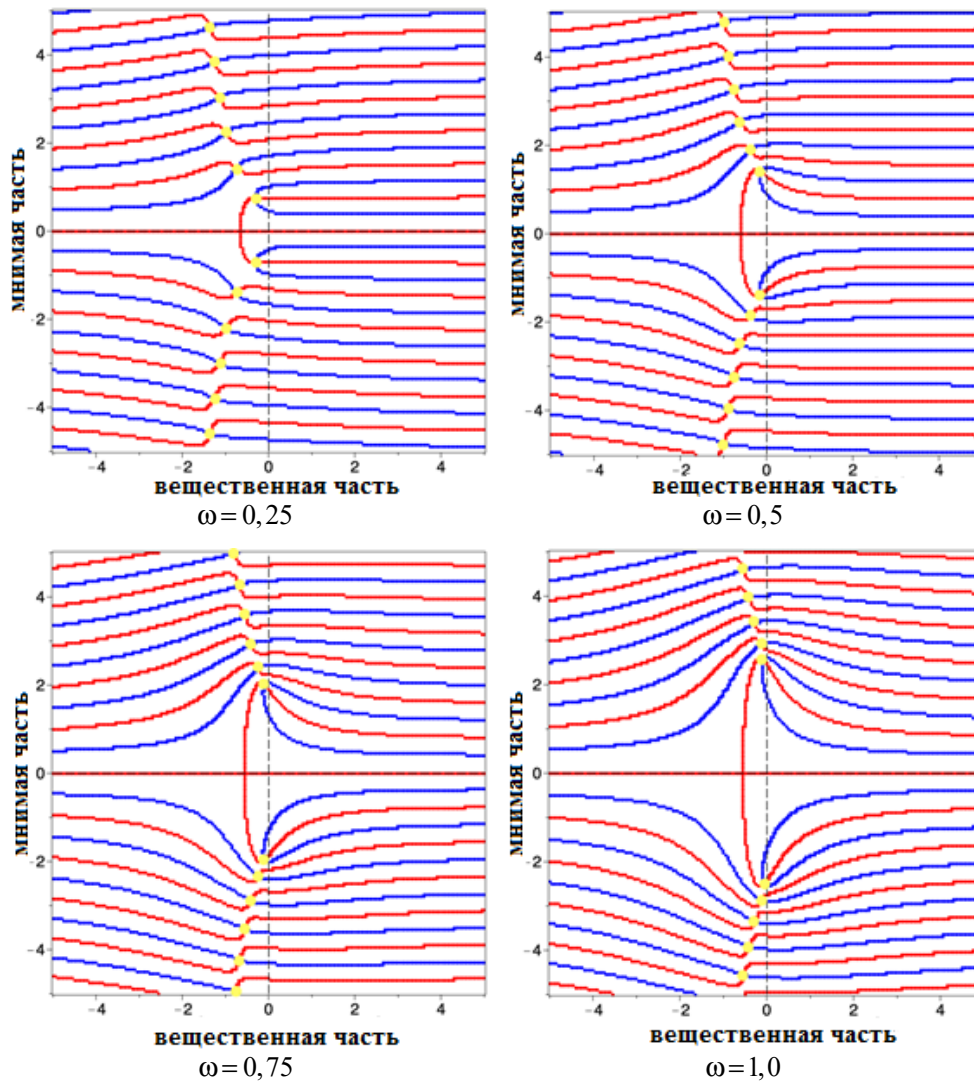


Рис. 6. Численное решение системы (18)
для неоднородного метаматериала $\varepsilon = -3\sqrt{x+1} - 1$

Список литературы

1. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. М. : Мир, 1984. 512 с.
2. Снайдер А., Лав Дж. Теория оптических волноводов. М. : Радио и связь, 1987. 656 с.
3. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М. : Радио и связь, 1988. 440 с.
4. Маркузе Д. Оптические волноводы. М. : Мир, 1974. 576 с.
5. Smirnov Y., Smolkin E. Complex Waves in Dielectric Layer // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41 (7). P. 1396–1403.
6. Smirnov Y. G., Smolkin E. Y. On the Existence of an Infinite Number of Leaky Complex Waves in a Dielectric Layer // Doklady Mathematics. 2020. Vol. 101 (1). P. 53–56.

References

1. Adams M. *Vvedenie v teoriyu opticheskikh volnovodov* = *Introduction to the theory of optical waveguides*. Moscow: Mir, 1984:512. (In Russ.)

2. Snyder A., Lav Dzh. *Teoriya opticheskikh volnovodov = Theory of optical waveguides*. Moscow: Radio i svyaz', 1987:656. (In Russ.)
3. Vaynshteyn L.A. *Elektromagnitnye volny = Electromagnetic waves*. Moscow: Radio i svyaz', 1988:440. (In Russ.)
4. Markuze D. *Opticheskie volnovody = Optical waveguides*. Moscow: Mir, 1974:576. (In Russ.)
5. Smirnov Y., Smolkin E. Complex Waves in Dielectric Layer. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2020;41(7):1396–1403.
6. Smirnov Y.G., Smolkin E.Y. On the Existence of an Infinite Number of Leaky Complex Waves in a Dielectric Layer. *Doklady Mathematics*. 2020;101(1):53–56.

Информация об авторах / Information about the authors

Максим Олегович Снегур

ассистент кафедры математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: snegur.max15@gmail.com

Maksim O. Snegur

Assistant of the sub-department
of mathematics and supercomputer
modeling, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 18.10.2021

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 10.11.2021

Принята к публикации / Accepted 29.11.2021